Μάθημα 13º | 19/04/18

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$. Τότε

f μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0

$$\Leftrightarrow \exists\, f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Παράδειγμα

α) $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ σταθερά, $f'(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

[Η f είναι ακέραια $:\Leftrightarrow$ $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη
και η $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό ολόμορφη $:\Leftrightarrow$
η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε $z \in D$]

β) $f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1$

γ) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f'(z) = n z^{n-1} \ \forall z \in \mathbb{C}$

δ) $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(z) = -n \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Για μιγαδικές διαφορίσιμες στο z_0 ισχύει η άλγεβρα των παραγώγων.

$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}, \text{ αν } g(z_0) \neq 0$$

f μιγ. διαφ. στο z_0, g μιγ. διαφορ. στο $f(z_0)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ μιγ. διαφ. στο z_0 και $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$

Από την άλγεβρα παραγώγων και τα παραδείγματα (α)-(δ) $\Rightarrow$ Παράδειγμα (ε)

(ε) Κάθε ρητή συνάρτηση του $z \in \mathbb{C}$, είναι ολόμορφη, όπου ορίζεται, και κάθε πολυώνυμο του z είναι ακέραια συνάρτηση.

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Η $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, είναι συνεχής

αλλά $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} =$

$= \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{\bar{w}}{w} = \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{\bar{w}^2}{|w|^2}$

Για $w = x+iy$ αντιστοιχεί στο όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(\underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{\text{Πραγματικό μέλος}} , \underbrace{\frac{-2xy}{x^2+y^2}}_{\text{Φανταστικό μέλος}} \Big)$$ το οποίο ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

Αφού κάθε μιγαδικός αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$.

Συνεπώς, η $f(z) = \bar{z} = x - iy$ δεν είναι σε κανένα
$\overset{\|}{x+iy}$

$z_0 = x_0 + iy_0$ μιγαδικά διαφορίσιμη

Παρατήρηση

Κάθε $f = u + iv$ με $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$

$$\binom{u}{v}\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Εδώ : $\binom{u}{v}\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow D\binom{u}{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

και επίσης $\binom{u}{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

6ϲ) $f(z)=|z|^2 = \underbrace{z\bar{z}}_{(x+yi)(x-yi)} = x^2+y^2$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη

μόνο στο $z_0=0$

$z_0 \neq 0$: $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{z\bar{z}-z_0\bar{z}_0}{z-z_0} =$

$= \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{(z-z_0)\bar{z}+z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0}\left(\bar{z}+z_0\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\right)$

το οποίο δεν υπάρχει, γιατί αν υπήρχε τότε σύμφωνα με την άλγεβρα των ορίων θα υπήρχε και το $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} =$

$=\lim\limits_{z\to z_0}\left[\left(\dfrac{1}{z_0}\left(\bar{z}+z_0\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\right)-\dfrac{\bar{z}}{z_0}\right]$

→Για $z_0=0$: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z|^2}{z} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\bar{z}}{z} =$

$= \lim\limits_{z\to 0}\bar{z} = 0$

$\exists$ $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\ \lambda \in \mathbb{C}$:
(στο $\mathbb{C}$)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0} = 0 \quad \text{και τότε} \quad \lambda = f'(z_0)$$
(και είναι μοναδικό.)

$$\exists\ \underbrace{f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} \underbrace{\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right)} = 0$$

$$= \frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}$$

Αφού $x+iy \underset{\text{αντιστ.}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \underset{\text{αντι.}}{=} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$

και
αντι.
$z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$
$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad (\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) = (\lambda_1 x - \lambda_2 y) + i(\lambda_1 y + \lambda_2 x)$

αντι. ‖

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_1 y + \lambda_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[δηλ. η $z \mapsto \lambda z$ αντιστοιχεί στην $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\text{ορίζουσα}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$]

Τα όρια της επάνω ισοδυναμούν με

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$\Longleftarrow$) Η $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό ($\overline{\overline{\text{αν}}}$ $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό)

είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) με παράγωγο

$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ και η $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

είναι το διαφορικό της $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ στο (x_0, y_0)

<u>Άρα</u>. Η $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, μιγαδικά διαφορ. στο $z_0 \in D$ $:\Longleftrightarrow$ Το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμο στο (x_0, y_0) με παράγωγο $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0) =$

$= \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ <u>όπου</u> (*) $\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{cases}$

Εξισώσεις Cauchy - Rieman.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>: Είδαμε ότι η $f(x+iy) = x - iy$

δηλ: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ έχει παράγωγο

$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, δηλ. δεν ικανοποιεί τις C-R

Παράδειγμα Η εκθετική συνάρτηση $f(z)=e^z$, $z\in\mathbb{C}$ είναι ακέραια. (entire)

$$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \overset{\text{ορ}}{=} u(x,y)+iv(x,y)$$

αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}e^x\cos y\\ e^x\sin y\end{pmatrix}$ με παράγωγο

$$D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}e^x\cos y & -e^x\sin y\\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}$$

που ικανοποιεί τις CR

⊛ $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$

[Εξήγηση: $f'(z_0)=\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$

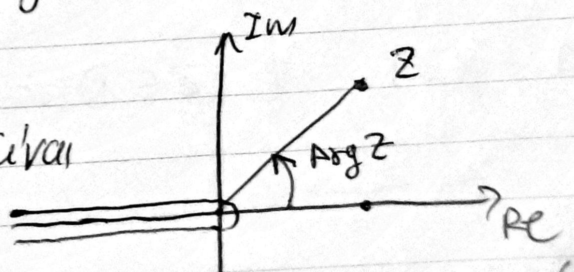
και $D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}$]

δηλαδή η e^z είναι μιγαδικά διαφορίσιμη με

$$(e^z)' = e^x\cos y + i e^x\sin y = e^z$$

Παράδειγμα

Η λογαριθμική συνάρτηση $\log: \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ $\left(\log z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$



$\Rightarrow$ μπορεί (αυτός ο κλάδος) να είναι μιγαδικά διαφ. μόνο στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Αυτό ισχύει και $(\log z)' = \frac{1}{z}\ \forall z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

Αυτό προκύπτει από τα παρακάτω:

ΠΡΟΤΑΣΗ

$D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής,

$f = \exp \circ g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη

$\Longrightarrow$ g είναι ολόμορφη και $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$

Εφαρμογή: άφου $z = e^{\log z}$. Θέτω $f(z) = z$ και

$\log z = g(z)$, και προκύπτει ότι $z = e^{\log z} =$

$= \underbrace{(\exp \circ g)}_{=f}(z)$

Απόδειξη

θνδο $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{f'(z_0)}{f(z_0)}$. Έστω $f'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow f(z) \neq f(z_0) \quad \forall \; z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

$\Rightarrow g(z) \neq g(z_0) \quad \forall \; z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Έστω $(z_n) \subset D(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$

με $z_n \longrightarrow z_0$

$\underset{\text{συνεχής}}{\overset{g}{\Longrightarrow}} g(z_n) \longrightarrow g(z_0) \underset{\text{ολομ}}{\overset{\exp}{\Longrightarrow}}$

$$\xrightarrow[\sigma\lambda.]{exp} \frac{e^{g(z_n)} - e^{g(z_0)}}{\underbrace{g(z_n) - g(z_0)}_{= \frac{f(z_n) - f(z_0)}{g(z_n) - g(z_0)}}} \longrightarrow e^{g(z_0)} = f(z_0)$$

$$\Rightarrow \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} = \underbrace{\frac{g(z_n) - g(z_0)}{f(z_n) - f(z_0)}}_{\frac{1}{f'(z_0)}} \cdot \underbrace{\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}}_{f'(z_0)}$$

Ασκήσεις: 49, 52, 54, 62